[8] Électrodes de Rogowski

Transformations conformes

Les problèmes électrostatiques dans lesquels les conducteurs ont des formes compliquées peuvent parfois être traités par la méthode des transformations conformes, qui donne des solutions analytiques exactes. Idéalement, on voudrait que :

- une fonction des coordonnées transforme la géométrie réelle en une géométrie plus simple ;
- la fonction inverse transforme les lignes de champ et les équipotentielles de la géométrie simple en lignes de champ et équipotentielles de la géométrie réelle.

Il s'avère que cela est effectivement possible, mais uniquement pour les problèmes à deux dimensions (ou à trois dimensions avec une symétrie) et sans charge d'espace (équation de Laplace $\Delta V = 0$). En outre, la transformation devra respecter les angles, puisque les lignes de champ et les équipotentielles sont perpendiculaires, aussi bien dans la géométrie réelle que dans la géométrie simplifiée.

Ainsi, à un système réel dans un plan Oxy, on fait correspondre un système simplifié dans un plan Ouv, par les relations :

$$\begin{cases} u = u(x;y) \\ v = v(x;y) \end{cases} \qquad (1)$$

Les lignes de champ et les équipotentielles trouvées dans la géométrie simple (le plus souvent un condensateur plan infini) seront reportées dans la géométrie réelle au moyen des fonctions inverses :

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases} \qquad (2)$$

La condition d'invariance des angles impose :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (3)$$

(Conditions de Cauchy-Riemann)

Complément facultatif sur les transformations conformes : Fred Gardiol, *Électromagnétisme*, Traité d'électricité vol. 3 (Éd. 2004) pp. 45-46 (EPF-BC : COEN L 315:3).

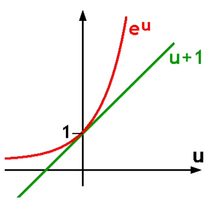
Condensateur plan semi-infini

Dans un condensateur réel, les armatures sont évidemment de dimensions finies ; et si le champ est à peu près uniforme au centre, il prend une configuration compliquée à l'extérieur. Pour s'attaquer à ce problème, Maxwell avait commencé par étudier le cas du condensateur plan semi-infini et démontré qu'on peut le transformer en un condensateur plan infini, au moyen des fonctions :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\pi}\left(u + 1 + e^u \cos v\right) \\[2ex] y = \dfrac{a}{\pi}\left(v + e^u \sin v\right) \end{cases} \qquad (4)$$

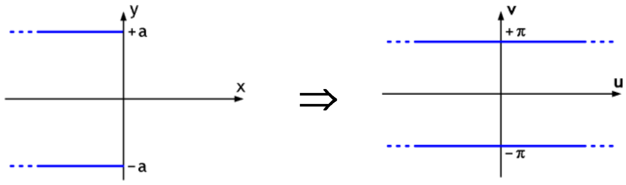
En effet, l'électrode infinie correspondant à $v = \pi$ devient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\pi}\left[(u+1) - e^u\right] \\[2ex] y = a \end{cases} \qquad (5)$$



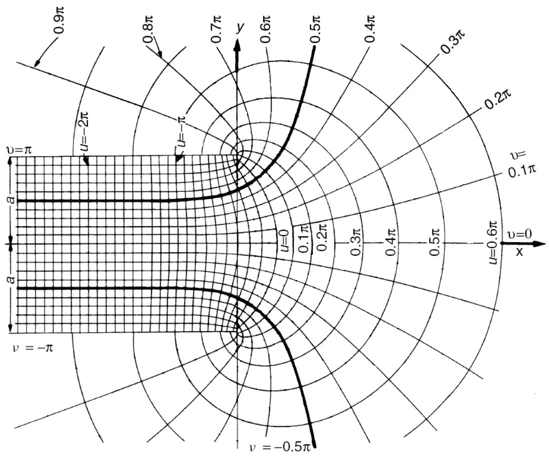
Or $(u+1) \le e^u \quad \forall u$, (graphique ci-contre) de sorte que x est toujours négatif ou nul.

Ainsi, les deux demi-droites parallèles séparées par une distance a, se transforment en deux droites séparées de π.



Par ailleurs, on vérifie aisément que les conditions de Cauchy-Riemann sont bien vérifiées.

Dès lors, les lignes de champ et les équipotentielles bien connues du plan (u ; v), peuvent être reportées dans le plan (x ; y) :



Les valeurs de u positives correspondent à des lignes de champ qui aboutissent à l'extérieur des plaques, tandis que les valeurs de u négatives correspondent aux lignes de champs situées entièrement entre les plaques.

Conditions d'homogénéité

Dans certaines applications, on souhaite non seulement que le champ soit quasi uniforme dans une certaine zone, mais aussi qu'en dehors de cette zone, son intensité ne dépasse nulle part la valeur uniforme.

Entre les deux plaques semi-infinies, le champ électrique peut être exprimé, dans le plan $x - y$, en fonction de u et de v. Le résultat du calcul donne :

$$|E| = \frac{U}{a} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2u} + 2e^u \cos v}} \equiv \frac{U}{a} f \qquad (6)$$

avec : U et –U : potentiels appliqués sur les plaques

Cherchons maintenant les équipotentielles le long desquelles le champ ne dépasse jamais la valeur uniforme :

$$|E| \le \frac{V}{a} \qquad (7)$$

L'équation :

$$1 + e^{2u} + 2e^u \cos v = 1 \qquad (8)$$

admet comme solutions :

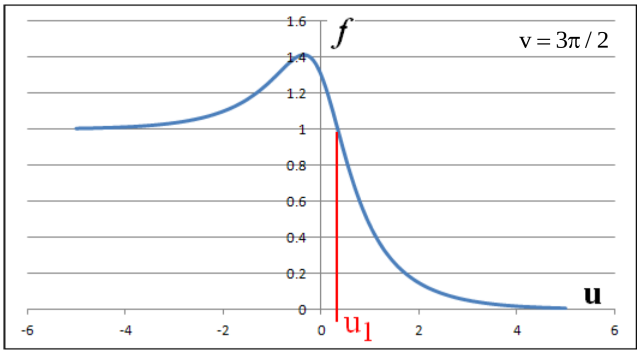
$$u_1 = \ln\ -2\cos v \qquad \text{et} \qquad u_2 = -\infty \qquad (9)$$

Le paramètre v est en principe compris entre 0 et π, mais pour que la solution (9) existe dans les nombre réels, il faut que $\cos v$ soit négatif, autrement dit $v > \pi/2$. En pareil cas :

$$u_1 < u < u_2 \quad \Rightarrow \quad 1 + e^{2u} + 2e^u \cos v < 1 \qquad (10)$$

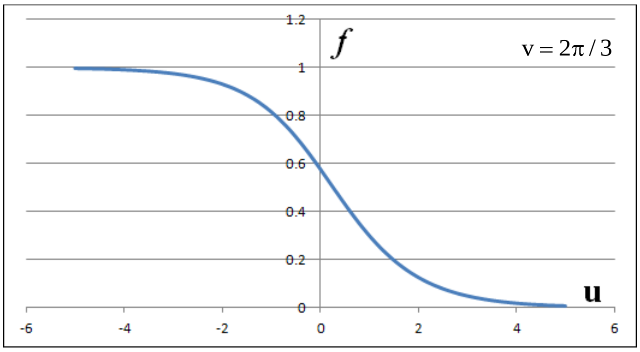
$$\Rightarrow \quad |E| > \frac{V}{a}$$

Ce résultat contredit la condition (7). Il est illustré dans le graphique ci-dessous, par le facteur *f* défini en (6), pour le cas où $v = 3\pi/2$:



On voit que le champ électrique est supérieur à V/a, pour toutes les valeurs de $u < u_1$, mais principalement à l'approche de $u = 0$ soit vers le bord de la plaque semi-infinie.

Pour satisfaire la condition (7), il faut donc $v \le \pi/2$. Dans ce cas : $\cos v \ge 0$, l'équation (8) n'a pas de solution réelle et le facteur *f* (ainsi que le champ électrique) reste toujours inférieur à 1, comme le montre le graphique ci-après pour $v = 2\pi/3$.



Profil de Rogowski

En utilisant le théorème des images et sa réciproque, on en conclut que l'on peut obtenir un champ quasi uniforme dans une certaine zone, et inférieur à sa valeur uniforme en dehors de la zone, à l'aide d'électrodes de dimensions finies, pour autant que ces électrodes aient la forme d'une équipotentielle correspondant à $v \le \pi/2$.

Walter Rogowski (1881-1947) fut le premier à proposer d'utiliser des électrodes correspondant à $v = \pi/2$ et $v = -\pi/2$: