

## [5]

# L'effet de pointe

### Le rôle des pointes en haute tension

En haute tension, l'effet de pointe intervient toujours d'une manière ou d'une autre.

#### D'UNE MANIÈRE NÉGATIVE :

- en limitant les potentiels admissibles ;
- en produisant une ionisation, source de rayonnements électromagnétiques perturbateurs ;
- en provoquant une instabilité des tensions ou des courants.

#### D'UNE MANIÈRE POSITIVE :

- en permettant de contrôler le seuil et le point d'apparition d'une décharge ;
- en permettant d'obtenir un champ électrique localement élevé, à l'aide d'un potentiel relativement modeste ;
- en limitant le potentiel à un niveau que l'on ne souhaite pas dépasser.

On notera qu'en pratique une pointe n'est jamais « parfaitement pointue » (le champ électrique y serait infini!). Lorsqu'un système comporte des pointes, sa modélisation doit prendre en considération leur forme réelle (rayon de courbure). De tels modèles posent également des problèmes de maillage, à cause de la très faible dimension de la pointe par rapport aux autres dimensions du système.

En outre, le traitement de l'effet de pointe est un problème « mal conditionné » : une toute petite différence dans la forme d'une pointe peut changer complètement le seuil de potentiel auquel le champ électrique atteint sa valeur disruptive. Sur le plan pratique, un système qui fait usage de pointes pour provoquer des décharges risque de voir ses caractéristiques se modifier assez rapidement au cours du temps. En effet, chaque décharge arrache quelques atomes à la pointe dont la géométrie se modifie ainsi progressivement.

### La sphère

Soit une sphère conductrice de rayon  $R$ , portant une charge  $Q$ , entourée d'un milieu de permittivité  $\epsilon$ .

Si l'on considère une surface sphérique  $S$  de rayon  $r$  à l'extérieur de la sphère, le théorème de Gauss nous permet d'écrire :

$$\epsilon E(r) 4\pi r^2 = Q \quad [C] \quad (1)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2} \quad [V/m] \quad (2)$$

$$\text{Or : } \mathbf{E}(r) = -\text{grad}(V) \quad [V/m] \quad (3)$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{\epsilon 4\pi r} \quad [V] \quad (4)$$

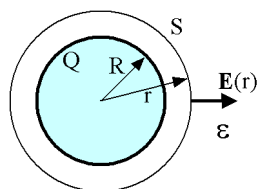
En éliminant la charge entre (2) et (4) :

$$E(r) = \frac{V(r)}{r} \quad [V/m] \quad (5)$$

En particulier, à la surface de la sphère ( $r = R$ ) :

$$E(R) = \frac{V(R)}{R} \quad [V/m] \quad (6)$$

**Conclusion :** À la surface d'une sphère, portée à un potentiel donné, le champ électrique est d'autant plus grand que le rayon de la sphère est plus petit.



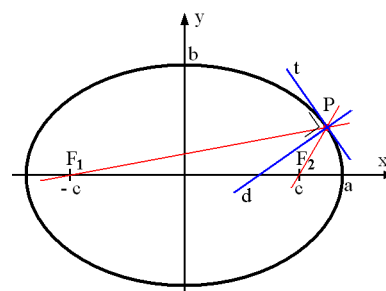
### L'ellipsoïde de révolution

Soit un ellipsoïde de révolution conducteur (parfait) de demi-axes  $a$  et  $b$ , portée à un potentiel  $V$ .

À démontrer : Les intensités  $E_a$  et  $E_b$  du champ électrique aux extrémités des demi-axes sont liées par la relation  $E_a/a = E_b/b$

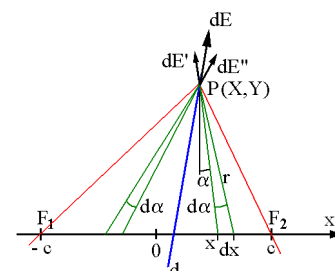
#### 1. Propriétés de l'ellipsoïde

- L'ellipsoïde de demi-axes  $a$  et  $b$ , placés sur les axes  $x$  et  $y$  d'un système de coordonnées cartésiennes, a ses foyers en  $F_1(-c; 0)$  et  $F_2(c; 0)$ , avec  $c^2 = a^2 - b^2$ .
- En tout point  $P$  de l'ellipsoïde, la bissectrice  $d$  de l'angle  $F_1PF_2$  est perpendiculaire à la tangente  $t$ .



#### 2. Distribution linéique de charges

Considérons des charges distribuées uniformément sur un axe, entre les points  $F_1$  et  $F_2$ , avec une densité linéique de charge  $\lambda$  [C/m]. Calculons le champ électrique engendré par ces charges en un point  $P(X, Y)$  quelconque extérieur à l'axe.



Pour cela, on considère une petite tranche de l'axe comprise entre  $x$  et  $x+dx$ , ce qui correspond à un angle compris entre  $\alpha$  et  $\alpha+d\alpha$  par rapport à la verticale abaissée du point  $P$ .

L'élément de champ électrique  $dE'$  est donné par :

$$dE' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \quad [V/m] \quad (7)$$

Afin d'éliminer  $dx$  et  $r$ , on procède aux changements de variables suivants :

$$\cos \alpha = \frac{Y}{r} \Rightarrow r = \frac{Y}{\cos \alpha}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{x-X}{Y} \Rightarrow x = Y \cdot \text{tg} \alpha + X \Rightarrow dx = \frac{Y}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\Rightarrow dE' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{Y} d\alpha \quad [V/m] \quad (8)$$

Il apparaît que cet élément de champ ne dépend plus que de l'ordonnée  $Y$  du point  $P$  et de l'élément d'angle  $d\alpha$ . Or  $d$  étant la bissectrice de l'angle  $F_1PF_2$ , à tout élément d'angle  $d\alpha$  situé d'un côté de cette droite correspond un  $d\alpha$  symétrique situé de l'autre côté, qui produit un élément de champ  $dE''$ . Les éléments  $dE'$  et  $dE''$  étant symétriques par rapport à  $d$  et de même intensité, la résultante  $dE$  sera portée par la droite  $d$ . En appliquant ce raisonnement sur l'ensemble des charges présentes entre  $F_1$  et  $F_2$ , il en découle que le champ électrique total au point  $P$  est porté par la bissectrice de l'angle  $F_1PF_2$ .

### 3. Équipotentielles

L'électrostatique nous apprend que les équipotentielles sont toujours perpendiculaires aux lignes de champ. Dans le cas présent, cela permet de formuler la conclusion partielle suivante :

**Lorsque des charges sont uniformément distribuées sur un segment de droite d'extrémité  $F_1$  et  $F_2$ , les équipotentielles sont en tout point  $P$  perpendiculaires à la bissectrice de l'angle  $F_1PF_2$ .**

En vertu des considérations géométriques formulées ci-dessus au point 1, ces équipotentielles sont donc des ellipsoïdes de foyers  $F_1$  et  $F_2$  (famille d'ellipsoïdes homofocaux).

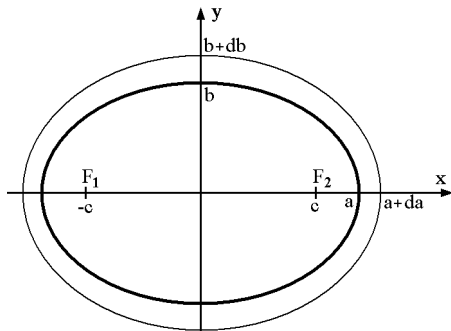
Admettons maintenant qu'un conducteur (parfait) ait précisément la forme de l'un de ces ellipsoïdes et qu'il soit porté au potentiel correspondant à cette équipotentielle. Conformément au 3<sup>e</sup> principe mentionné au chapitre 2 slide 11, le champ électrique à l'extérieur de cet ellipsoïde restera identique, et les équipotentielles seront toujours des ellipsoïdes ayant les mêmes foyers que le conducteur en question.

### 4. Champs électriques aux extrémités des demi-axes

Nous avons donc maintenant un conducteur ellipsoïdal de révolution, de demi-axes  $a$  et  $b$ , avec :

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (9)$$

Considérons une équipotentielle voisine de ce conducteur. Ses demi-axes seront  $a+da$  et  $b+db$ .



En dérivant la relation (3) :

$$2c \, dc = 2a \, da - 2b \, db \quad (10)$$

Mais comme les foyers du conducteur et de l'équipotentielle sont les mêmes,  $dc = 0$ , de sorte que :

$$\frac{db}{da} = \frac{a}{b} \quad (5)$$

Soit  $V$  le potentiel auquel se trouve le conducteur et  $V+dV$  le potentiel de l'ellipsoïde voisin. Le champ électrique étant le gradient du potentiel, il est donné aux extrémités des demi-axes par :

$$E_a = \frac{dV}{da} \quad [V/m] \quad (11)$$

$$E_b = \frac{dV}{db} \quad [V/m] \quad (12)$$

$$\Rightarrow \frac{E_a}{E_b} = \frac{db}{da} \Rightarrow \boxed{\frac{E_a}{E_b} = \frac{a}{b}} \quad [-] \quad (13)$$

Conclusion : Le champ est plus élevé à l'extrémité du plus grand des demi-axes, autrement dit là où la courbure est plus forte.

### 5. Question

Aurait-on pu calculer les champs électriques  $E_a$  et  $E_b$ , à partir du champ à la surface d'une sphère, et en tenant compte uniquement de la courbure locale de l'ellipsoïde ?

Pour répondre à la question, le plus simple est d'essayer !

Les rayons de courbure aux extrémités des demi-axes sont donnés par les relations géométriques :

$$R_a = \frac{b^2}{a} \quad \text{et} \quad R_b = \frac{a^2}{b} \quad [m] \quad (14)$$

En utilisant ces relations pour calculer le champ électrique selon la formule de la sphère (6) :

$$E_a = \frac{V}{R_a} = \frac{V \cdot a}{b^2} \quad \text{et} \quad E_b = \frac{V}{R_b} = \frac{V \cdot b}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_a}{E_b} = \frac{a^3}{b^3} \quad [V/m] \quad (15)$$

**Ce qui contredit (13) !**

☞ **On ne peut pas calculer le champ électrique en un point d'une surface conductrice quelconque, en approximant cette surface par une sphère qui aurait localement le même rayon de courbure.**